SESSION 2004

1/4

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Comptabilité et Gestion des Organisations

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

<u>Matériel et documents autorisés</u> :
L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Code sujet : 04NC-CGMAT

EXERCICE 1 (12 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

A. Statistique

On a relevé le chiffre d'affaires annuel d'une société depuis 8 ans. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où x_i est le rang de l'année et y_i le chiffre d'affaires correspondant, en millions d'euros.

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires annuel : y_i	5	7,5	9,2	11	18,3	22,5	31	43

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel on fera figurer les valeurs approchée de z_i, arrondies à 10^{-3}.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$	1,609							

   b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (x_i, z_i). Arrondir r à 10^{-3}. Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.

3. En déduire une expression de y en fonction de x de la forme $y = \alpha\, e^{kx}$ où α et k sont des constantes à arrondir à 10^{-1}.

4. En déduire une estimation, arrondie à 10^{-1}, du chiffre d'affaires de l'entreprise, en millions d'euros, pour l'année 2004.

B. Probabilités

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Dans une usine de la société dont on a étudié le chiffre d'affaires dans la partie *A.*, on fabrique des pièces métalliques d'un certain type pour du matériel de bureau.

1. Dans cette usine, les pièces métalliques de ce type sont fabriquées par deux unités de production notées « unité 1 » et « unité 2 ».

   Un jour donné, la production de l'unité 1 est de 600 pièces et la production de l'unité 2 est de 900 pièces.

   On admet que 0,7 % des pièces produites par l'unité 1 et 1,2 % des pièces produites par l'unité 2 ont un « défaut de surface ».

   On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1500 pièces produites par cette usine pendant cette journée.

   Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

   On définit les événements suivants :

   A : « la pièce est produite par l'unité 1 » ;

   B : « la pièce est produite par l'unité 2 » ;

   D : « la pièce présente un défaut de surface ».

   On note $P_A(D) = P(D/A)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

   a) Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$ à l'aide des informations contenues dans l'énoncé.

   b) Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

   c) En déduire la probabilité qu'une pièce, prélevée au hasard dans la production totale d'une journée, présente un défaut de surface.

2. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production totale d'une journée.

   Le nombre de pièces produites est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On note E l'événement : « une pièce, prélevée au hasard dans la production de la journée, a un défaut de surface ».

   On admet que $P(E) = 0{,}01$.

   On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut de surface parmi ces 50 pièces.

   a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

   b) Calculer $P(X \leq 1)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. On prélève une pièce au hasard dans un stock important.

   On admet que la variable aléatoire Y qui, à chaque pièce associe la mesure de sa « dureté », suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type 1,2.

   Une pièce est jugée acceptable si la mesure de sa dureté appartient à l'intervalle [52,66 ; 57,34].

   Calculer la probabilité que la pièce soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

EXERCICE 2 (8 points)

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 42 - 40e^{-0,3t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ (unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 5 sur l'axe des ordonnées).

1. a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au a).

2. a) Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0, +\infty[$.

   b) Étudier le signe de $f'(t)$ lorsque t varie dans $[0, +\infty[$.

   c) Établir le tableau de variation de f dans $[0, +\infty[$.

3. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant, dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

   b) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $f(t) \geq 35$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles. (On utilisera une valeur approchée à 10^{-1}).

5. a) Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0, 5]$ est $V_m = \dfrac{46}{3} + \dfrac{80}{3}e^{-1,5}$.

   b) Donner la valeur approchée, arrondie à l'unité, de V_m.

B. Application économique

On suppose que $f(t)$ représente le coût total d'utilisation, en milliers d'euros, au bout de t années, d'une des machines dont s'est équipée une entreprise.

1. L'entreprise décide de revendre une machine dès que le coût d'utilisation dépasse 35 000 euros. Déduire du *A.* au bout de combien d'années l'entreprise devra revendre cette machine.
2. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation économique du résultat obtenu au *A.* 5. b).

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

1/2

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$\left(e^u\right)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

3. *PROBABILITES :*

a) Loi binomiale

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

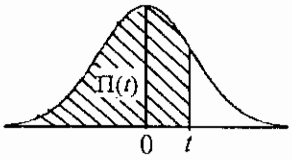
b) <u>Loi normale</u>

2|2

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$