Néa

SESSION 1999

99NC-CGMAT

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

Comptabilité et Gestion

Mathématiques

Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage des instruments de calcul est autorisé.
- Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
- Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Exercice 1 (10 points).

Dans un magasin, pour le marché d'un produit audiovisuel, l'offre et la demande hebdomadaires, exprimées en dizaines d'articles de ce produit, sont données en fonction du prix unitaire x, exprimé en milliers de francs, respectivement par :

$$O(x) = \frac{e^{ax} - 1}{4} \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{20}{e^{ax} + 1},$$

où x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0,5 ; 4]$ et où a désigne un nombre réel strictement positif donné.

La situation est défavorable aux producteurs lorsque l'offre dépasse la demande ; elle est défavorable aux consommateurs lorsque la demande n'est pas satisfaite en totalité.

1 - Sachant qu'un prix de vente unitaire de 2,99 milliers de francs correspond à une offre de 4 dizaines d'articles, déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de a.

Pour la suite du problème, on travaille avec $a = 0,95$.

2 - Calculer les valeurs arrondies au franc près de $O(2)$ et $D(2)$, puis de $O(3)$ et $D(3)$.
Dans chacun de ces deux cas, indiquer pour qui la situation est défavorable.

3 - Calculer la dérivée O' de O. Etudier le signe de O' sur $[0,5 ; 4]$; en déduire le sens de variation de la fonction O sur $[0,5 ; 4]$.

4 - Calculer la dérivée D' de D. Etudier le signe de D' sur $[0,5 ; 4]$; en déduire le sens de variation de la fonction D sur $[0,5 ; 4]$.

5 - On note (C_O) et (C_D) les courbes représentatives des fonctions O et D dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

a) Représenter sur le même graphique (C_O) et (C_D) sur $[0,5 ; 4]$.
b) Le prix unitaire d'équilibre x_e étant défini par $O(x_e) = D(x_e)$, déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, les valeurs approchées à 10^{-1} près de chacun des réels x_e et $O(x_e)$.
c) En observant le graphique, déterminer, selon les valeurs de x, les situations défavorables aux producteurs et celles défavorables aux consommateurs.

6 - a) Démontrer par le calcul que $x_e = \dfrac{\ln 9}{0,95}$.

Quel est alors, arrondi au franc près, le prix unitaire de l'article ?

b) Calculer la valeur exacte de $O(x_e)$. En déduire le nombre d'articles offerts assurant l'équilibre du marché.

Exercice 2 (10 points).

On s'intéresse dans cet exercice à la production de bovins.

Les parties I, II et III sont indépendantes.
Les résultats sont attendus sous forme de valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

I - Une exploitation produit des bovins de trois races différentes : Aubrac, Bazadaise et Charolaise.
Pour une période donnée, l'observation du cheptel donne les informations suivantes :

- 40 % des bovins sont des mâles.
- 30 % des mâles sont de race Aubrac.
- La race Charolaise représente 20 % de la population totale.
- 35 % des bovins de race Charolaise sont des mâles.
- La race Bazadaise compte autant de mâles que de femelles.

1) Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant les données précédentes.

	Aubrac	Bazadaise	Charolaise	Total
Femelles				
Mâles				
Total				100

2) On choisit au hasard, dans la population totale, un bovin qui n'est pas de race Aubrac.
Quelle est la probabilité p_1 pour que ce soit une femelle de race Bazadaise ?

3) On choisit au hasard un bovin de chacune des trois races.

a) Montrer que la probabilité p_2 de l'événement "on obtient trois mâles" est 0,06.
b) Calculer la probabilité p_3 d'obtenir au moins une femelle.

II - Dans un centre d'élevage, on étudie le poids des bovins d'un âge fixé.
Soit X la variable aléatoire donnant le poids d'un bovin choisi au hasard.
On suppose que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ. On sait que 20 % des bovins ont un poids supérieur à 359 kg et que 90 % ont un poids inférieur à 368 kg.

1) Montrer que m et σ sont solutions du système :

$$\begin{cases} m + 0{,}84\sigma = 359 \\ m + 1{,}28\sigma = 368 \end{cases}$$

Calculer m et σ.

2) Dans cette question, on prend $m = 342$ et $\sigma = 20$.
On veut sélectionner, pour la reproduction, les 15 % de bovins les plus lourds. A partir de quel poids M, déterminé à 1 kg près, un animal sera t-il sélectionné ?

III - Un concepteur de régimes alimentaires pour bovins désire mettre sur le marché un nouveau produit. Il souhaite fonder sa publicité sur le fait, qu'entre la naissance et trois mois, le gain mensuel moyen de poids est de 36 kg. Il fait tester son produit dans un groupement d'exploitations. Le régime administré à un échantillon de 100 bovins (assimilé à un prélèvement aléatoire avec remise) a donné un gain mensuel moyen de poids de 34,65 kg avec un écart type de 4,25 kg.

1) Déterminer une estimation ponctuelle s de l'écart type de la population totale.

2) On décide d'assimiler la loi de la variable aléatoire $\overline{G}$ qui, à tout échantillon de taille 100, associe le gain mensuel moyen de poids, à la loi normale $\mathcal{N}\left(g\,;\frac{s}{10}\right)$ où g désigne le gain mensuel moyen de poids de la population totale.

a) Construire un test bilatéral permettant de décider, au seuil de signification 5 %, si la publicité envisagée est mensongère ou non.
Pour cela : - écrire une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1,
- déterminer la région critique au seuil de signification 5 %,
- énoncer la règle de décision.

b) Appliquer ce test à l'échantillon précédent et conclure.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab)=\ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b)=\exp a \times \exp b$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

3. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$y=ax+b \text{ , où } a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad ; \; x=a'y+b' \text{ , où } a'=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \; \sigma_y}$$

a) Loi binomiale :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \qquad \text{où} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

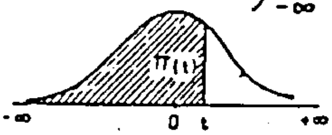
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,952 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,928 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour *t* positif. Lorsque *t* est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$

pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$