DISTANCE MINIMALE DANS UN TRIANGLE : compte rendu

Mise en scène : J. Thiers
Scénaristes et acteurs : Les 23 élèves de la classe de première S2 du lycée Félix Esclangon à Manosque et J. Thiers.

Scène 1 : Le problème – Première phase : la recherche individuelle.
Scène 2 : La vérification des résultats proposés.
Scène 3 : Deuxième recherche. Rédaction d'une conjecture.
Scène 4 : Mise en place de stratégies de démonstrations.
Scène 5 : Les démonstrations.

Les élèves s'appellent : Alpha (α), Bêta (β), Gamma (γ)…
Le professeur est désigné par : P.

SCENE 1 : ***Début en classe, avant les vacances de noël, puis à la maison jusqu'aux vacances de février.***

Je distribue des exercices à chercher pendant les vacances de Noël.
Comme d'habitude, à la fin de cette fiche sont proposés des défis. Il y en a deux, mais dans ce scénario on ne s'intéresse qu'à l'un d'eux..

P : « Vous avez jusqu'aux vacances de février pour chercher ces défis. Vous pouvez me les rendre quand vous voulez, avant le 8 février, jour où, comme les autres fois, on montrera les solutions trouvées les plus intéressantes…. »

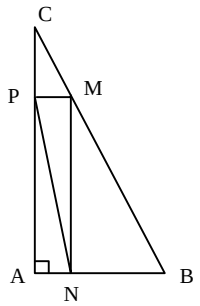
<u>Le Problème :</u>

ABC est un triangle rectangle en A. M est un point de l'hypoténuse [BC].

N et P sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur [AB] et [AC].

Déterminer sur [BC] un point M tel que la distance NP soit minimale. Est-il unique ?

Dans ce cas, comment doit -être le triangle ABC pour que le segment [NP] soit parallèle à (BC) ?



Au retour des vacances, certains ont cherché les défis et me les rendent.
Pendant toute la période du 8 janvier au 8 février, je garde les réponses qui me sont rendues, sans rien dévoiler et j'encourage ceux qui n'ont rien rendu à le faire avant le 8 février.

Le deuxième défi est trouvé par de nombreux élèves. Je n'en parlerai pas.

Ce défi là, le problème ci-dessus n'a été résolu par aucun élève. (Voir photocopie de deux réponses).

J'ai pris un très grand risque en posant ce problème à la maison mais
- Soit certains n'ont pas eu le temps de le chercher : en première S, ils ont dans l'ensemble beaucoup de travail à la maison et s'ils n'ont pas trouvé de solution pendant les vacances, nombreux sont ceux qui renoncent.
- Soit ils n'ont pas trouvé quelque chose qui les satisfasse, même en se faisant aider.

Seuls six élèves m'ont rendu leurs ébauches de résolution, leurs idées.

Le vendredi 8 février arrive. C'est le dernier jour avant les vacances. Les derniers retardataires me rendent leurs défis.

P : « Personne n'a trouvé une solution satisfaisante à ce problème mais des idées ont été émises. On va vérifier les conjectures proposées et on va organiser une recherche en classe. »

SCENE 2 : ***En classe. La salle C200 est équipée de 19 PC, d'une imprimante et d'un vidéo projecteur, mais c'est aussi une salle de classe qui peut accueillir 36 élèves.***

J'ai allumé un ordinateur et le vidéo projecteur.

La figure du problème apparaît sur l'écran, la distance NP est affichée.
Les élèves ne m'ont pas vu construire le document, je l'ai chargé à partir de ma clé USB.

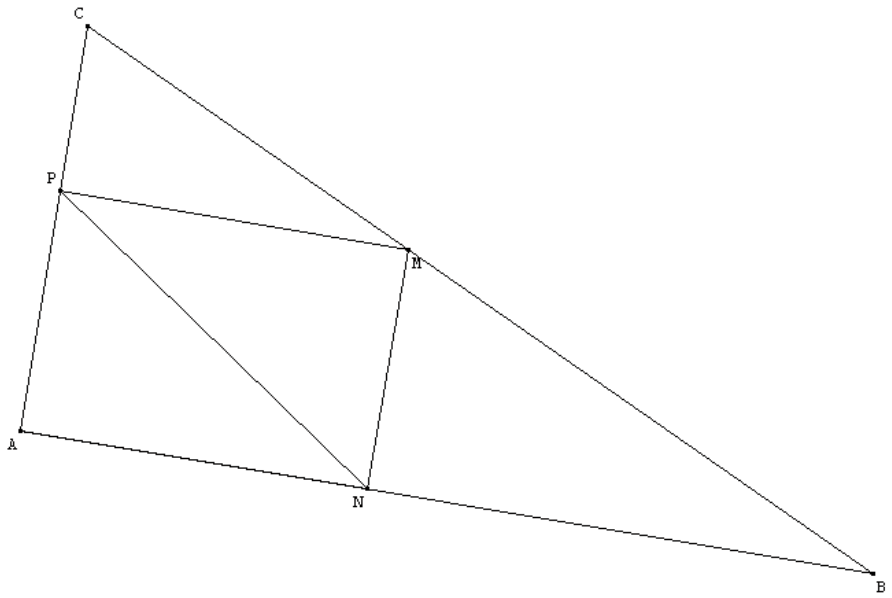
Je n'ai encore pas rendu les copies corrigées, les élèves qui ont proposé des idées ne savent pas si leurs propositions sont justes ou fausses.

On écrit au tableau les propositions qui ont été faites :

- On doit avoir (NP) parallèle à (BC) ;
- On doit prendre M au milieu de [BC] ;
- On doit prendre M de façon à ce que PIAJ soit un carré ;
- …

On essaie. Je faits varier le point M sur le segment [BC]…
Certains sont concentrés sur le mouvement de M, d'autres pensent à guetter l'affichage de la distance NP.

NP:4.77



On fait varier les dimensions du triangle rectangle ABC et on fait d'autres essais…
Les conjectures proposées ne marchent pas.

λ : « Non mais il faut quand même que M soit plus près du petit côté de l'angle droit ».

θ : « Ouais ! C'est sûr. Mais où exactement ? »

Après avoir laisser fuser quelques remarques, les élèves se taisent, ils ont envie de réfléchir !

SCENE 3 : ***En classe, les élèves sont devant un ordinateur, seul ou, la plupart d'entre eux par deux.***

La consigne : On doit construire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique. On doit faire afficher la longueur NP.

Les contraintes : Il faut pouvoir faire varier le point M sur le segment [BC] et faire varier les dimensions du triangle rectangle ABC.

L'objectif : On doit trouver où doit se situer exactement le point M et rédiger une conjecture.

ω : « Dis Alpha, si on veut que les points bougent, il faut créer des points libres. .. non ?
α : Ben oui. Allons y ;
P : Eh, il pas rectangle votre triangle !

α : Non, mais on va le faire rectangle… Regardez ;
P : Pouvez-vous être sûr que vous avez un triangle rectangle ?
α : Bien sûr, on a bougé les points exprès !
P : Et si vous bougez de nouveau les points pour faire d'autres essais ?
ω : Il suffit de faire attention et de toujours mettre un angle droit !
P : Penchez [AB]… essayez maintenant d'obtenir un triangle rectangle en bougeant C…
α : Voilà !
ω : T'es sûr ?
α : A peu près !
P : Recommencez de façon à ce que ça marche à coup sûr.

β : « Madame !
P : Oui ?
β : On peut travailler dans un repère ?
P : Bien sûr, c'est même une très bonne idée.
β : je suis un as ! »

…
…

P : « Ca y est , Phi et Tau ? Vous avez fini ?
φ : Oui…
P : Montrez –moi…. Bien, maintenant essayez avec un autre triangle rectangle.
τ : Il faut tout refaire ?
P : Mais non, il suffit de bouger B par exemple !
…
τ : Ca bouge pas !
P : Comment avez vous construit le triangle ? Montrez moi le texte de votre construction.
φ : On a pris B de coordonnées (0 ; 5). Si on veut changer il suffit de changer les coordonnées dans le texte ?
P : Oui, ça marche. Mais ce n'est pas pratique !
τ : Ah, ! Je sais, on crée un nombre…, voilà … Variable Numérique… et on prend B de coordonnées (0 ; *b*)…
P : Allez-y ».

α : « Madame !
P : Oui ?
α : Avec Oméga, on a fini la figure, on a fait des essais, mais on n'arrive pas à trouver ce qu'il faut de particulier pour que NP soit le plus petit possible ?
P : Vous avez essayé de construire d'autres choses ?
ω : ben … Non. Pourquoi ?
P : Pour avoir des idées. Je ne sais pas, tracer d'autres éléments, des droites, des cercles, des segments, d'autres points… Mais je vous conseille d'enregistrer d'abord avant de modifier. »

φ : « Madame, nous non plus on trouve pas !
P : Vous avez travaillé dans un repère ? Essayez d'afficher d'autres éléments, des coordonnées de points, des équations de droites par exemple…

10 minutes plus tard, on écrit au tableau la conjecture suivante :

Pour que la longueur NP soit minimale, il faut que M soit le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

SCENE 4 : ***En classe. Certains élèves resteront devant les ordinateurs, d'autres préfèreront travailler à leur table.***

P : « Maintenant qu'on a trouvé une conjecture qui a l'air d'être correcte, il faut la démontrer. Comment comptez-vous faire ?
λ : J'en ai marre de travailler sur l'ordinateur !
ε : J'aime pas la géométrie !
θ : Toujours démontrer, toujours démontrer… »
Je propose que ceux qui ne veulent plus travailler sur l'ordinateur retournent à leur place.
Je repose la question.

β : « Il faut faire des calculs… moi je préfère faire les calculs sur le papier.
ω : Moi aussi !

α : Ah oui, Pythagore, Thalès… Moi aussi je préfère réfléchir avec une feuille.

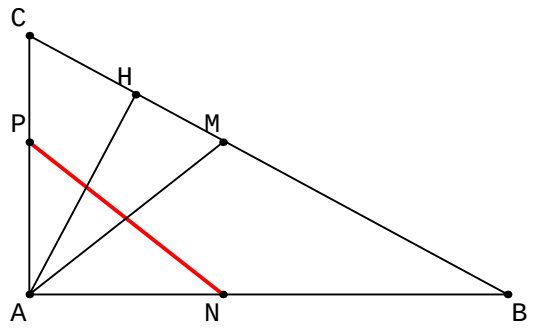
π : Madame ? On peut faire une démonstration à l'aide de dessins ?
P : Oui, je pense.
π : Bon alors je reste devant l'ordi, je vais essayer… »
Après 5 à 10 minutes, il y en a 4 qui préfère travailler et chercher une démonstration sur l'ordinateur. Les autres préfèrent revenir à leur table.

$\alpha, \beta, \quad \lambda...$: « Madame, on trouve pas !
P : Bon alors essayons d'y réfléchir tous ensemble, en tous cas ceux qui ne sont pas devant l'écran. Allez y, avez-vous un début d'idée ?
β : Il nous faut un *x* !
ε : pourquoi ? c'est de la géométrie !
β : Ben… parce qu'on cherche NP et NP c'est un nombre comme *x*.
α : Bon alors on pose : $NP = x$.

P : Vous êtes sûrs que vous cherchez NP ?
P : Vous cherchez à savoir où placer M pour que NP soit *minimale* !
β : minimal, minimum…
P : Oui ! où a-t-on rencontré ces mots ?
ε : Dans les fonctions ! (Grand sourire !) On veut que NP soit le minimum donc NP est une fonction.
P : Pas tout à fait. La longueur NP est peut être considérée comme image par une fonction. On peut appeler f cette fonction. Donc on pose $NP = f(x)$. Il y a bien un *x*.
ω : Ben alors… C'est quoi *x* ?
φ : C'est l'abscisse d'un point !
ω : Comment on fait alors pour le théorème de Thalès ?
β : NP varie quand M varie sur [BC]. Donc NP dépend de la position de M… Il faut poser $BM = x$.
P : Bien. On peut poser $BM = x$, ou bien on peut décider que *x* est l'abscisse du point M. Que faut-il faire après ?
β : Il faut trouver la formule !
α : Quelle formule ?
β : $f(x)$.
P : Oui, il faut exprimer NP en fonction de *x*. donc trouver $f(x)$. Et ensuite ?
ε : On cherche le minimum. On étudie la fonction *f*.
P : Bien : Est-ce tout ?
β : Il faut montrer que le point M trouvé est le pied de la hauteur.

Pendant ce temps ceux qui travaillent sur l'ordinateur n'ont pas chômé.
Voici leur dessin et leur argument :

NP:4.39



H est le pied de la hauteur issue de A.
Le triangle AMH est donc rectangle.
AM en est l'hypoténuse.
Or l'hypoténuse est toujours plus grande que les autres côtés.

On fait profiter tout le monde de leur travail et
Je rappelle la définition de la distance d'un point à une droite.

SCENE 5 : ***En classe, puis à la maison.***

Stratégies de démonstration par le calcul :

Stratégie 1 :

- On pose $BM = x$, $AB = b$ et $AC = c$. Ces trois nombres sont positifs. On travaillera pour *x* compris entre 0 et $\sqrt{b^2 + c^2}$.
- On exprime NP^2 en fonction de *x*. Donc $NP^2 = f(x) = AM^2$.

- On étudie la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; $\sqrt{b^2+c^2}$]. On cherche la valeur de *x* pour que *f* soit minimale.
- On démontre que (AM) est alors perpendiculaire à (BC).

Stratégie 2 :

- On pose x l'abscisse de M, $C(0\,;c)$ et $B(b\,;0)$. Ces trois nombres sont positifs. On travaillera pour *x* compris entre 0 et $\sqrt{b^2+c^2}$.
- On exprime NP^2 en fonction de *x*. Donc $NP^2 = f(x) = AM^2$.
- On étudie la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; $\sqrt{b^2+c^2}$]. On cherche la valeur de *x* pour que *f* soit minimale.
- On démontre que (AM) est alors perpendiculaire à (BC).

Le travail est à faire à la maison, sur feuille, par groupes de 2.
Deux groupes choisissent la stratégie 1, mais ils prendront pour *a* et *b* des valeurs numériques.
Deux groupes choisissent d'essayer la stratégie 2 dans le cas général.
Les autres groupes choisissent la stratégie 2 dans des cas numériques.

Chaque élève du groupe avait l'obligation de rédiger une partie de la démonstration même s'ils l'avaient cherchée à deux.
L'autre ayant la charge de vérifier le travail de son coéquipier.
Quand cela n'a pas été fait sérieusement, j'ai pu relever des incohérences de notation.

Les élèves ont trouvé que le travail en groupe pour rédiger la démonstration à la maison était contraignant car ils avaient des difficultés à trouver des moments pour se rencontrer (on est à « la campagne »).