

# BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITES	COEF.	DUREE
CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE	2	3
INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3
SYSTEMES ELECTRONIQUES	2	3

## MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 5 pages, numérotées de 1 à 5.  
La page 5/5 est à rendre avec la copie.  
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.  
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

**Code sujet :**

**MATGRA1**

### Exercice 1 (11 points)

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés d'un filtre numérique  $N$  et de comparer des effets de ce filtre avec ceux d'un filtre analogique  $A$ .

#### Partie I

On rappelle que tout signal discret causal est nul pour tout nombre entier strictement négatif.

Soient  $x(n)$  et  $y(n)$  les termes généraux respectifs de deux signaux discrets causaux représentant, respectivement, l'entrée et la sortie du filtre numérique  $N$ . Ce filtre est conçu de telle sorte que, pour tout nombre entier  $n$  positif ou nul, on a :

$$y(n) - y(n-2) = 0,04x(n-1).$$

1. On note  $Zx$  et  $Zy$  les transformées en  $Z$  respectives des signaux causaux  $x$  et  $y$ . Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$  et  $1$ , on a :

$$(Zy)(z) = \frac{0,04z}{(z-1)(z+1)}(Zx)(z).$$

2. On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret :

$$x(n) = e(n) \text{ avec } e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

- a) Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$  et  $1$ , on a :

$$(Zy)(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

- b) Calculer les constantes réelles  $A$ ,  $B$  et  $C$  telles que :

$$\frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1}.$$

- c) En remarquant que :

$$\frac{(Zy)(z)}{z} = \frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)}$$

montrer que, pour tout nombre entier  $n$  positif ou nul, on a :

$$y(n) = 0,02n + 0,01(1 - (-1)^n).$$

- d) Déterminer  $y(2k)$  puis  $y(2k+1)$  pour tout nombre entier naturel  $k$ .
- e) En déduire que pour tout nombre entier naturel  $k$ , on a :  $y(2k+1) = y(2k+2)$ .
- f) Représenter graphiquement les termes du signal causal  $y$  lorsque le nombre entier  $n$  est compris entre  $-2$  et  $5$ .

**Partie II**

On rappelle que la fonction échelon unité, notée  $U$ , est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Soit la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $t$  par :

$$f(t) = \sin(20t)U(t) .$$

On note  $F$  la transformée de Laplace de la fonction  $f$ . Le signal de sortie du filtre analogique  $A$  est représenté par la fonction  $s$  dont la transformée de Laplace  $S$  est telle que :

$$S(p) = \frac{F(p)}{p} .$$

1. Justifier que, pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, on a :

$$s(t) = \int_0^t f(u) du .$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, on a :

$$s(t) = \frac{1 - \cos(20t)}{20} .$$

3. Donner sans justification la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction  $s$ .

4. Tracer, sur le graphique du document réponse, l'allure de la courbe représentative de la fonction  $s$ .  
Il n'est pas demandé d'étudier la fonction  $s$ .

*La figure du document réponse montre une simulation du résultat obtenu en sortie du filtre numérique soumis à une version échantillonnée de la fonction  $f$ , lorsque la période d'échantillonnage est 0,02.*

## Exercice 2 (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

## Partie A

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

Soit  $f$  une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle  $[0 ; 1[$  par  $f(t) = \alpha t + \beta$ .

On appelle  $a_0, a_n$  et  $b_n$  les coefficients de Fourier associés à la fonction  $f$ .

1. Montrer que  $a_0 = \frac{\alpha}{2} + \beta$ .
2. Montrer que  $b_n = -\frac{\alpha}{n\pi}$  pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul.

On admet que  $a_n = 0$  pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour que le développement  $S$  en série de

Fourier de la fonction  $f$  soit défini pour tout nombre réel  $t$  par  $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi t)$ .

- a) Déterminer les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $a_0 = 0$  et  $b_n = \frac{1}{n}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

En déduire l'expression de la fonction  $f$ .

- b) Représenter la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$  dans un repère orthogonal.

## Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t) .$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction  $s$  en remplaçant  $f(t)$  par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction  $f$  obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) .$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) .$$

1. Vérifier que la fonction  $s_1$  définie pour tout nombre réel  $t$  par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

Document à rendre avec la copie

