SESSION 2009

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPÉCIALITÉS	COEF.	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3

MATHÉMATIQUES

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.
Les pages 6 et 7 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA2

Exercice 1 (9 *points*)

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier naturel n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur **R**, périodique de **période 2**, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t \text{ sur } [0;1[\\ f(t) = 0 \text{ sur } [1;2[\end{cases}$$

a) En utilisant le **document réponse n°1, à rendre avec la copie**, tracer la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$.

b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)\right]$.

Calculer a_0.

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{eff}{}^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}(a_n{}^2 + b_n{}^2)}{\mu_{eff}{}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur **R**, périodique de **période 2**, dont la courbe représentative C_g est tracée sur l'intervalle $[-4;4]$ dans le document réponse n°1.

On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par :

$$S_g(t) = S_f(-t).$$

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur **R**, périodiques de **période 2**, telles que :

$h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre réel t.

a) Sur le **document réponse n° 1, à rendre avec la copie**, tracer les courbes C_h et C_k représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4;4]$.

b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par :

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \quad \text{et} \quad S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Exercice 2 (11 *points*)

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t)+\int_0^t s_1(u)\,\mathrm{d}u = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p)=\dfrac{1}{p+1}$.

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.

La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse n°2**.

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t)+\int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t)-U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t)=U(t)-U(t-1).$$

2. Déterminer $S_2(p)$.

3. **a)** En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.

b) Justifier que :

$$\begin{cases} s_2(t)=0 & \text{si } t<0 \\ s_2(t)=\mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0\leq t<1 \\ s_2(t)=-\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

5. Calculer $s_2(1^+)-s_2(1^-)$.

6. On appelle C_2 la courbe représentative de la fonction s_2.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b) Compléter le tracé la courbe C_2 sur la **figure 2 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t)+\int_0^t s_3(u)\mathrm{d}u = U(t)-U(t-1)+U(t-1{,}1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_3(t)=U(t)-U(t-1)+U(t-1{,}1).$$

a) Montrer que $e_3(t)=e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty;1{,}1[$.

b) Déterminer $e_3(t)$ pour $t\geq 1{,}1$.

c) Représenter graphiquement la fonction e_3.

Pour la suite, on admet que :

$$\begin{cases} s_3(t)=s_2(t) & \text{si } t<1{,}1 \\ s_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1{,}1}\right) & \text{si } t\geq 1{,}1. \end{cases}$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1{,}1\,;+\infty[$.

3. Calculer $s_3\left(1{,}1^+\right)-s_3\left(1{,}1^-\right)$.

4. On appelle C_3 la courbe représentative de la fonction s_3.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b) Compléter le tracé de la courbe C_3 sur la **figure 3 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.**

MATGRA2

Document réponse n° 1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : représentation de la fonction f

Figure 2 : représentation de la fonction g

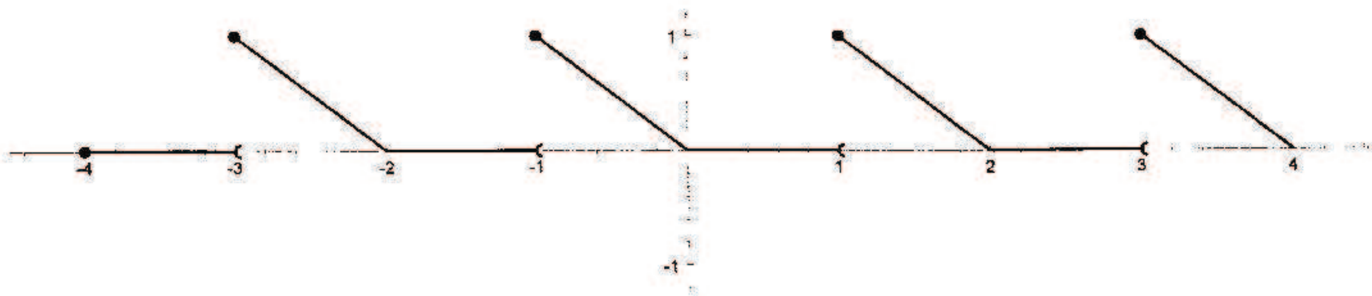
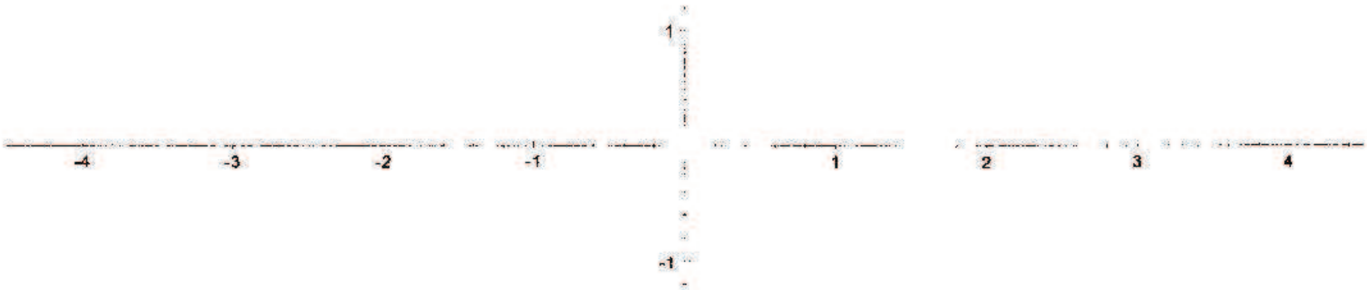


Figure 3 : représentation de la fonction h

Figure 4 : représentation de la fonction k



MATGRA2

Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 2)

Figure 1 : représentation de la fonction s_1

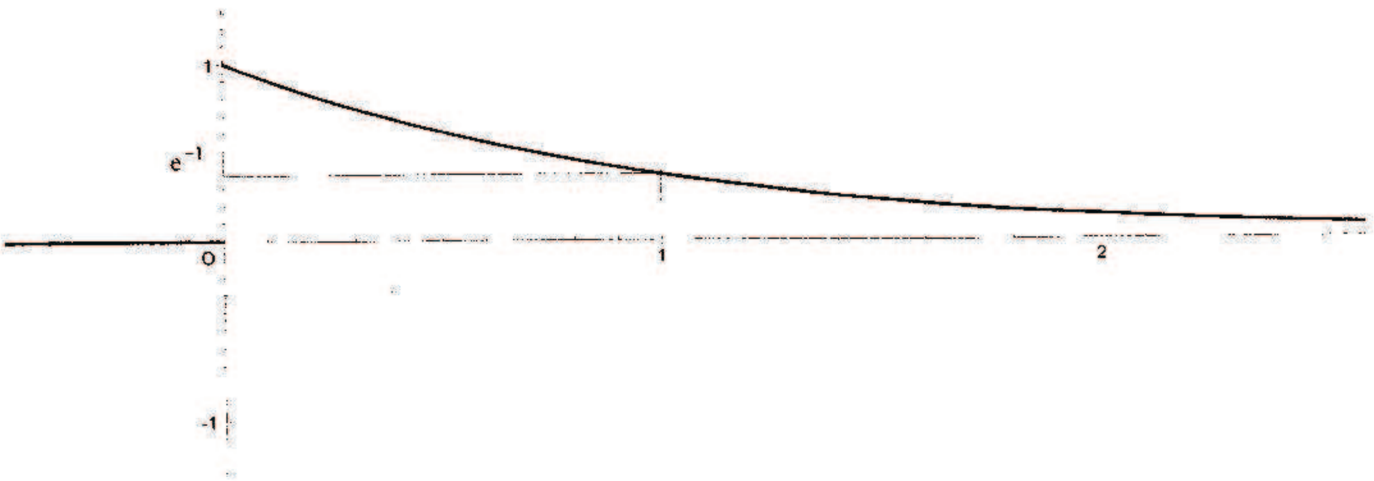


Figure 2 : représentation de la fonction s_2 à compléter

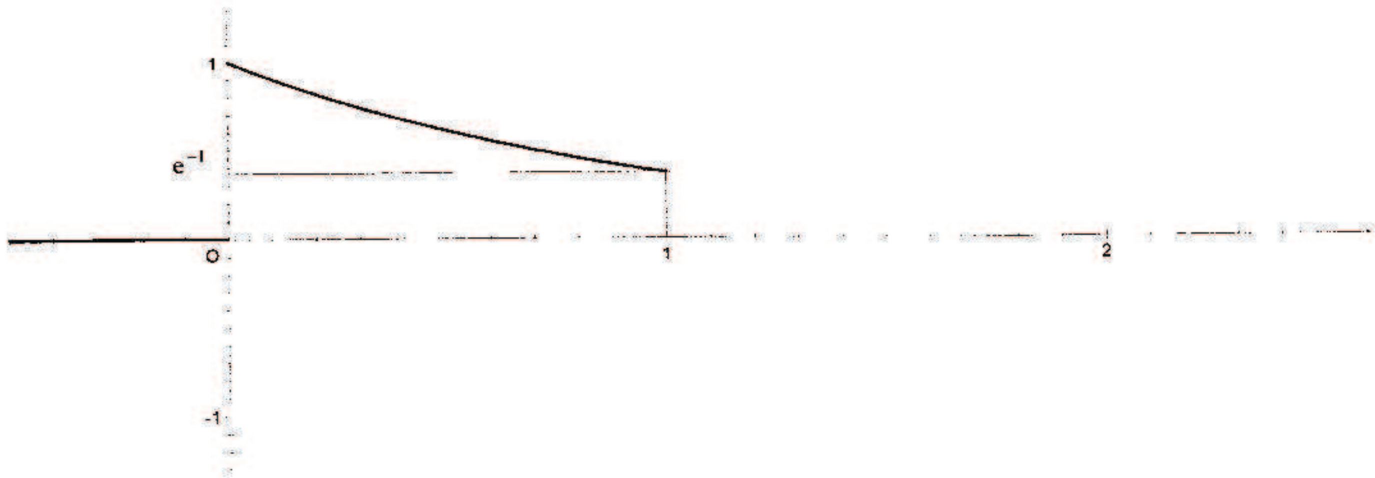


Figure 3 : représentation de la fonction s_3 à compléter