BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2007

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB1***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façade – étanchéité	2
Etudes et économie de la construction	2
Fluides – énergies – environnements	2
Géologie appliquée	1,5
Maintenance et après-vente automobile	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatismes industriels	2
Moteurs à combustion interne	2
Productique mécanique	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

On étudie dans cet exercice une fonction φ susceptible d'intervenir dans la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. Pour un réel t positif, $\varphi(t)$ est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 710y = 710$
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions définies sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' + 710y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = 1$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.

On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1° Montrer que la fonction φ est croissante sur $[0, +\infty[$.

2° a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est $\varphi(t) = 710t - \dfrac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.

3° Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ défini au début de la partie B. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0 ; 0{,}01]$.

4° a) Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0,5$.
Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.
b) Retrouver sur la figure le résultat obtenu au a) : faire apparaître les constructions utiles.

Le nombre α représente le temps médian en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

C. Calcul intégral

1° Pour tout réel positif t, on note $I(t) = 710 \int_0^t x\,\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -t\,\mathrm{e}^{-710t} - \frac{1}{710}\,\mathrm{e}^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

2° Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

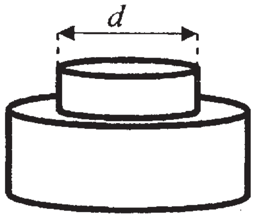
Le résultat obtenu est le temps moyen en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

EXERCICE 2 (8 points)

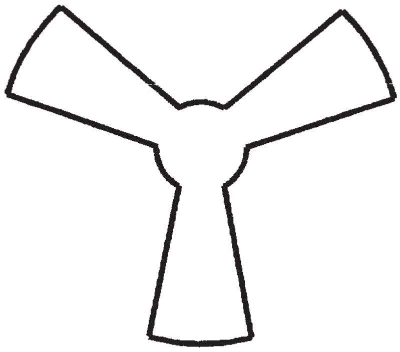
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique des ventilateurs en grande quantité. On s'intéresse à trois types de pièces : l'axe moteur, appelé pièce de type 1, l'ensemble des trois pales, appelé pièce de type 2 et le support, appelé pièce de type 3.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.



Pièce de type 1



Pièce de type 2

A. Loi normale

Une pièce de type 1 est conforme lorsque le diamètre d (voir la figure), exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle [29,8 ; 30,2].
On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 1 prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1, associe le diamètre d exprimé en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 0,09.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1 soit conforme.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de pièces de type 2.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces de type 2 est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0{,}03$.
On prélève au hasard 20 pièces dans le stock de pièces de type 2 pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pièces de type 2.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1° Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

C. Test d'hypothèse

Une importante commande de pièces de type 3 est passée auprès d'un sous-traitant. La hauteur du support doit être de 400 millimètres.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des hauteurs, en millimètres, des pièces de type 3.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 3 prélevée au hasard dans la livraison associe sa hauteur.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 5$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 pièces de type 3 prélevé dans la livraison, associe la moyenne des hauteurs des pièces de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 400$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 400$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1° Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 0,5.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que :
$P(400 - h \leq \overline{Z} \leq 400 + h) = 0{,}95$.

2° En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3° On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des hauteurs des pièces est $\overline{z} = 399{,}12$.
Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour la hauteur ?