MATGRDS

Session 2006

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SOUS EPREUVE : MATHEMATIQUES

GROUPEMENT D

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses Biologiques	1
Bioanalyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène Propreté Environnement	2
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encre et adhésifs	2
Plasturgie	1,5
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
1 feuille de papier millimétré par candidat.

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci)

EXERCICE 1 (11 points)

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type de pièces cylindriques pour du matériel de laboratoire.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un stock de ce type de pièces, 3 % ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 100 pièces de ce stock pour vérifier la longueur. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces non conformes pour la longueur.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus trois pièces ne soient pas conformes pour la longueur.

3° On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

4° On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au 3°.
Calculer $P(X_1 \leq 3)$.

B. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Les pièces sont expédiées par lots de 1000.
On prélève au hasard un lot de 1000 dans un dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 pièces.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1000 pièces, associe le nombre de pièces non conformes pour la longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}03$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.
On note Y_1 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39 .

1° Justifier les paramètres de cette loi normale.

2° Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 20 pièces non conformes pour la longueur dans un lot de 1000 pièces, c'est à dire calculer $P(Y_1 \leq 20{,}5)$.

C. Probabilités conditionnelles

Les pièces sont fabriquées par deux machines, notées : « machine 1 » et « machine 2 ».
On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme pour la longueur est 0,97 et que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 soit conforme pour la longueur est 0,98.
La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce dans la production totale de l'entreprise d'une journée.
On définit les évènements suivants :
A : « la pièce provient de la machine 1 » ;
B : « la pièce provient de la machine 2 » ;
C : « la pièce est conforme ».

1° Déduire des informations figurant dans l'énoncé :
$P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$, $P_B(C)$.
(On rappelle que $P_A(C) = P(C|A)$ est la probabilité de C sachant que l'évènement A est réalisé.)

2° En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.

3° Calculer $P(C)$.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie on s'intéresse au diamètre des pièces, exprimé en millimètres.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 30 pièces dans la production d'une journée.
Soit $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 30 pièces prélevées au hasard et avec remise dans la production d'une journée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon.
On suppose que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{30}}$ avec $\sigma = 0,19$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne des diamètres obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 4,99$.

Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne inconnue μ des diamètres des pièces produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95 %.

EXERCICE 2 (9 points)

Dans cet exercice, on étudie une fonction qui peut décrire la pollution d'un réservoir d'eau par un hydrocarbure.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}4\ y = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0{,}4\ y = 0$.

2° Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, les unités graphiques étant de 1 cm sur l'axe des abscisses et de 3 cm sur l'axe des ordonnées.

1° On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2° a) Démontrer que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = (5-2t)\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$.

b) Etudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$.

c) Donner le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

3° a) La fonction f définie dans la partie B est solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Vérifier que, pour tout t de $[0\ ;+\infty[$, $f(t) = -2{,}5\ f'(t) + 12{,}5\ \mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$.

b) En déduire qu'une primitive de f est définie sur $[0, +\infty[$ par :
$F(t) = (-12{,}5\ t - 31{,}25)\ \mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$.

c) Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0, 24]$ est :
$V_m = \dfrac{1}{24}\,[\ 31{,}25 - 331{,}25\ \mathrm{e}^{-9{,}6}\ ]$.

d) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m .