

EXERCICE 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fabrication, dans une usine d'un grand groupe de l'industrie automobile, d'un certain modèle de véhicules à « moteur hybride ».

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

A. Loi binomiale

Dans cette question on s'intéresse à un stock important de véhicules sortis des chaînes de montage de l'usine.

On appelle « véhicule défectueux » un véhicule possédant au moins un défaut. Il y a « beaucoup » de défauts possibles à la sortie d'une chaîne de montage.

On note E l'événement : « un véhicule prélevé au hasard dans le stock est défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0,2$.

On prélève au hasard 20 véhicules dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 véhicules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de véhicules défectueux de ce prélèvement.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité qu'un seul véhicule de ce prélèvement soit défectueux.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un véhicule soit défectueux.

B. Loi normale

Dans cette partie, on s'intéresse au coût de remise en état des véhicules présentant un certain type de défaut. On considère la variable aléatoire C qui à chaque véhicule prélevé au hasard dans une grande série de véhicules présentant ce type de défaut associe le coût, en euros, de sa remise en état.

On suppose que la variable aléatoire C suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 200.

1° Calculer $P(C \leq 700)$.

2° Calculer la probabilité que la remise en état d'un véhicule prélevé au hasard dans la série des véhicules présentant ce type de défaut coûte entre 200 et 800 euros.

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2009
DUREE : 2 h.		Coefficient 2
09NC-CGMAT	MATHEMATIQUES	page 2/5

C. Probabilités conditionnelles

Les véhicules proviennent de deux ateliers notés a et b .

On admet que pendant un mois donné, l'atelier a produit 40 % des véhicules et que le reste est produit par l'atelier b .

On admet que 10 % des véhicules provenant de l'atelier a sont défectueux et que 15 % des véhicules provenant de l'atelier b sont défectueux.

On prélève au hasard un véhicule dans l'ensemble de la production du mois des deux ateliers.

Tous les véhicules ont la même probabilité d'être prélevés.

On considère les événements suivants :

A : « le véhicule prélevé provient de l'atelier a » ;

B : « le véhicule prélevé provient de l'atelier b » ;

D : « le véhicule prélevé est défectueux ».

1° Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

(On rappelle que $P_A(D) = P(D / A)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).

2° a) Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.

b) En déduire $P(D)$.

3° Calculer la probabilité qu'un véhicule provienne de l'atelier a sachant qu'il est défectueux.

Arrondir à 10^{-2} .

BTS COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2009
DURÉE : 2 h.		Coefficient 2
09NC-CGMAT	MATHEMATIQUES	page 3/5

EXERCICE 2 (10 points)

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[6, 30]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36 \ln x + 150$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et un centimètre pour 100 sur l'axe des ordonnées.

1° a) Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[6, 30]$,

$$f'(x) = \frac{(x-6)(x+6)}{x}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[6, 30]$.

c) Donner la tableau de variation de f sur $[6, 30]$.

2° a) Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à l'unité.

x	6	10	15	20	25	30
$f(x)$						

b) Tracer la courbe C dans le repère défini au début.

c) Tracer sur la figure du b) la droite Δ d'équation $y = 22,5x$.

B. Calcul intégral

1° a) Soit H la fonction définie sur $[6, 30]$ par $H(x) = x \ln x - x$. Démontrer que H est une primitive sur $[6, 30]$ de la fonction h définie par $h(x) = \ln x$.

b) Dédire du a) une primitive F sur $[6, 30]$ de la fonction f définie dans la partie A.

2° a) On note $I = \int_6^{30} f(x) dx$.

Démontrer que $I = 8\,928 - 1\,080 \ln 30 + 216 \ln 6$.

b) En déduire la valeur moyenne V_m de f sur $[6, 30]$.

C. Application économique

On s'intéresse à une entreprise qui fabrique et commercialise un certain type d'articles.

On admet que le coût total de production pour x articles produits, avec $6 \leq x \leq 30$, est $f(x)$ euros, où f est la fonction définie dans la partie A.

1° Chaque article fabriqué est vendu 22,5 euros. Déterminer en fonction de x la recette $r(x)$, en euros, pour x articles vendus.

2° Déterminer le bénéfice en euros pour 20 articles fabriqués et vendus.

3° À l'aide du graphique réalisé dans la partie A, déterminer pour quelle valeur de x le bénéfice est maximal.

BTS COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2009
DURÉE : 2 h.		Coefficient 2
09NC-CGMAT	MATHEMATIQUES	page 5/5