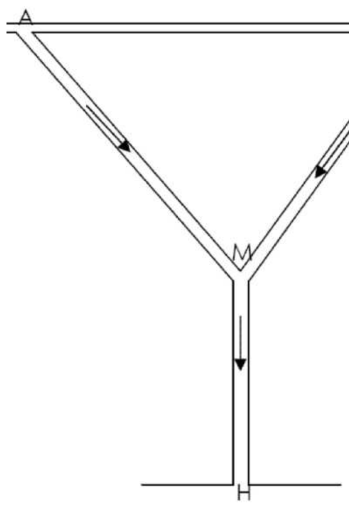
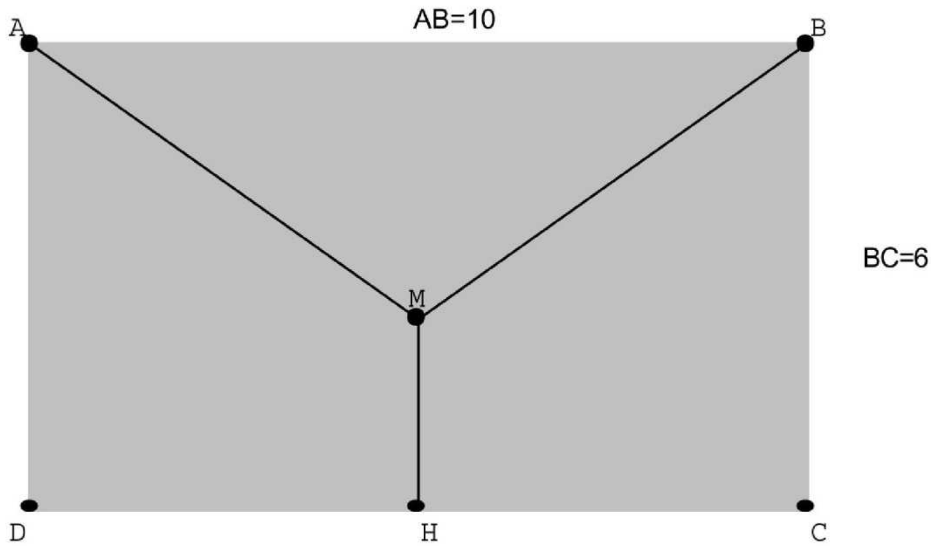
Expérimenter, conjecturer, démontrer	Optimisation d'une longueur	Fiche professeur

I. Présentation de l'activité

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

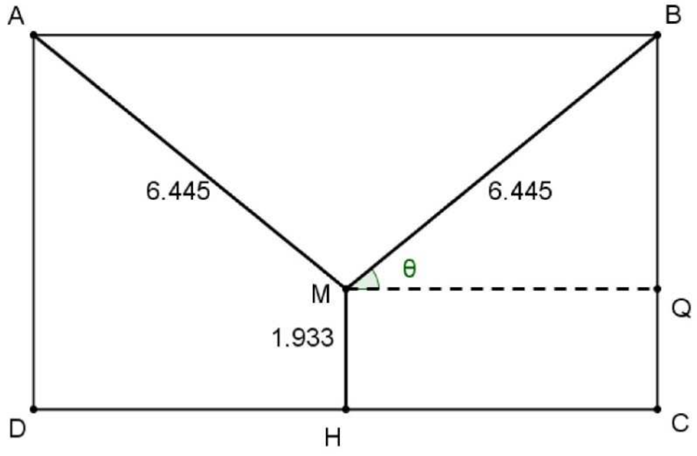


On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



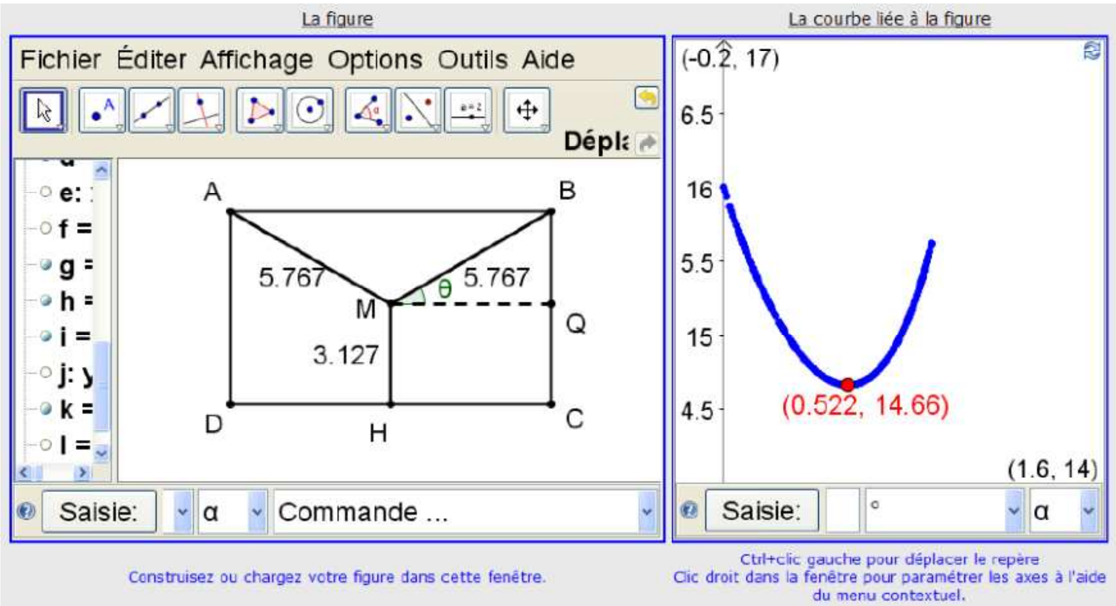
Sur ce plan :
– [AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux,
– [MH] représente le troisième tuyau,
– (MH) est la médiatrice de [DC].
On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

1^e^ étape : Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique



2^e^ étape : Utilisation d'une ressource en ligne avec Géogébra

http://www.univ-orleans.fr/irem/ecureuil/LierUneCourbe.htm



II. Public/niveau

1^e^ S ; Terminale S

III. Objectifs

✓ **Mathématiques**

- Expérimenter et démontrer sur un problème d'optimisation.
- Émettre une conjecture en croisant des informations variées : observation d'une figure dynamique, données numériques et graphiques.
- Élaborer une stratégie permettant de déterminer l'extremum d'une fonction.

✓ **Informatiques**

- Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
- Le cas échéant, traduire, à l'aide de Géogébra et d'une ressource en ligne, une situation géométrique par un graphique.
- Travail des compétences du B2i du Domaine 3 (créer, produire, traiter, exploiter des données) : concevoir des documents numériques en choisissant le logiciel, le service ou le matériel adapté ; exploiter des données ou des documents numériques ; modifier un ou plusieurs paramètres d'une situation simulée ou modélisée.
- Travail des compétences du B2i du Domaine 4 (s'informer, se documenter) : consulter des ressources.

IV. Déroulement de l'activité

✓ **Pour l'expérimentation et la conjecture**

- En groupe en salle informatique, un ou deux élèves par poste.
- La construction de la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et l'utilisation de la ressource en ligne permettent de conjecturer la solution.

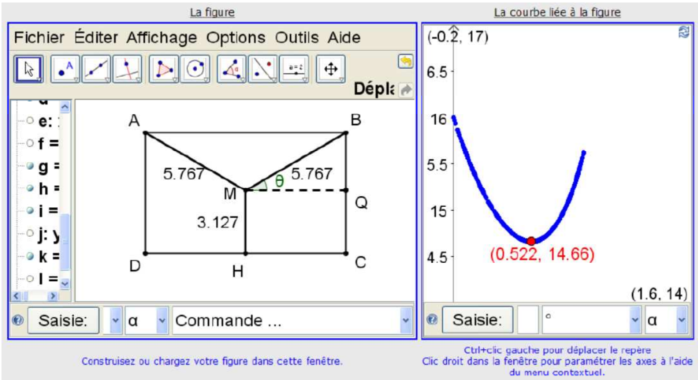
✓ **Pour la démonstration**

- En classe entière.
- Mise en place d'une stratégie de démonstration selon le scénario ou le prolongement du scénario opéré.

V. Démonstrations & prolongements possibles

✓ À l'aide d'une fonction trigonométrique 1^{e} S

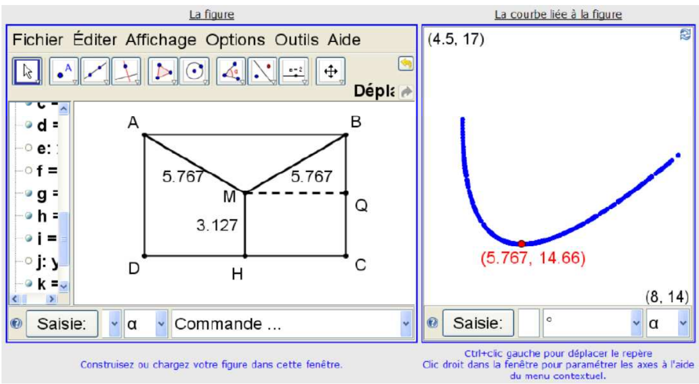
- On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ} = \theta$.
- On définit la fonction $f : \theta \mapsto f(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
- On conjecture $\theta \approx 0,52$.
- L'utilisation conjuguée de Géogébra et de la ressource en ligne permet de visualiser et de conjecturer le sens des variations de *f*.



- On détermine l'expression puis on étudie les variations de *f*.

✓ À l'aide d'une fonction composée Term S

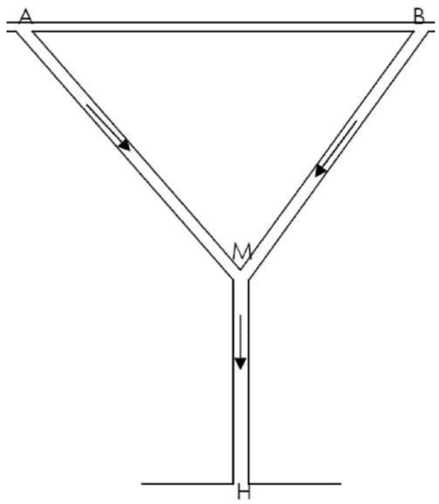
- On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable $x = MA = MB$.
- On définit la fonction $g : x \mapsto g(x) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $\left]5\ ;\ \sqrt{61}\right[$.
- On conjecture $x \approx 5,77$.
- L'utilisation conjuguée de Géogébra et de la ressource en ligne permet de visualiser et de conjecturer le sens des variations de *g*.



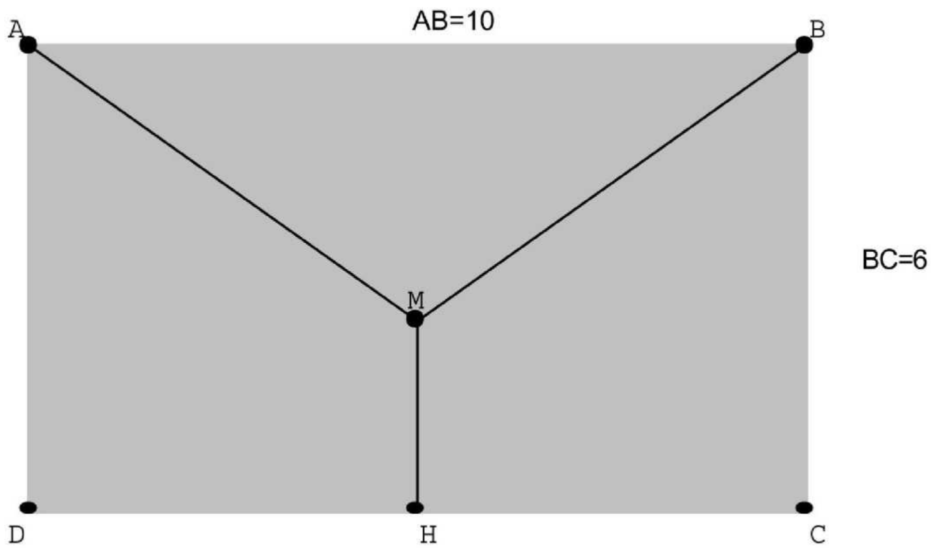
- On détermine l'expression puis on étudie les variations de *g*.

Expérimenter, conjecturer, démontrer	**Optimisation d'une longueur**	**Fiche élève**

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.



On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



Sur ce plan :
– [AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux,
– [MH] représente le troisième tuyau,
– (MH) est la médiatrice de [DC].

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{\mathrm{BMQ}} = \theta$.

1. **a.** Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

b. Déterminer une valeur approchée de la valeur de θ qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée de la longueur minimale totale des tuyaux.

On pourra éventuellement utiliser Géogébra conjointement à la ressource en ligne située : *http://www.univ-orleans.fr/irem/ecureuil/LierUneCourbe.htm*,
Afin d'observer les variations de la longueur totale des tuyaux en fonction de θ.

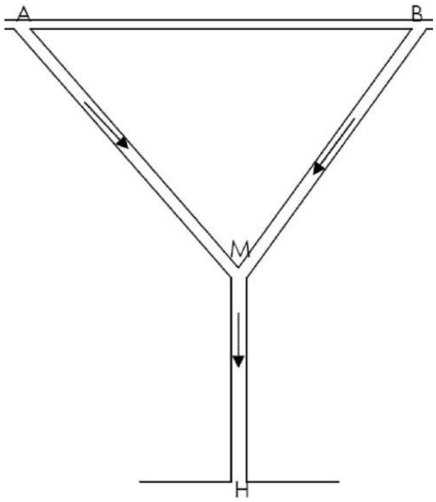
2. On définit la fonction $f : \theta \mapsto f(\theta) = 2\mathrm{MA} + \mathrm{MH}$ sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

a. On note f' la fonction dérivée de *f*. Démontrer que $f'(\theta) = 5 \times \dfrac{2\sin\theta - 1}{(\cos\theta)^2}$.

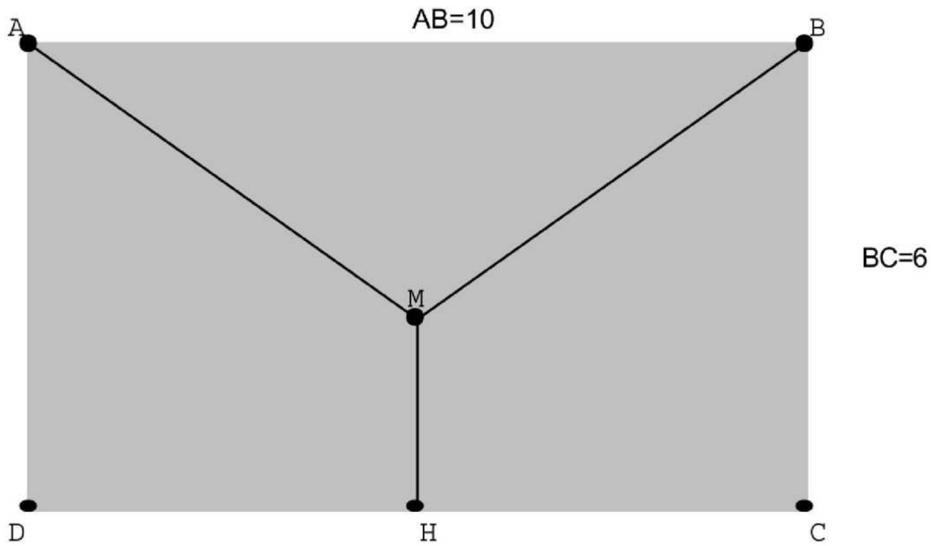
b. Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Expérimenter, conjecturer, démontrer	**Optimisation d'une longueur**	**Fiche élève**

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.



On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



Sur ce plan :
– [AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux,
– [MH] représente le troisième tuyau,
– (MH) est la médiatrice de [DC].

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable $x = \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

1. **a.** Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

b. Déterminer une valeur approchée de la valeur de x qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée de la longueur minimale totale des tuyaux.

On pourra éventuellement utiliser Géogébra conjointement à la ressource en ligne située : http://www.univ-orleans.fr/irem/ecureuil/LierUneCourbe.htm,
Afin d'observer les variations de la longueur totale des tuyaux en fonction de x.

2. On définit la fonction $g : x \mapsto g(x) = 2\mathrm{MA} + \mathrm{MH}$ sur l'intervalle $\left]5\,;\,\sqrt{61}\right[$.

a. On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(x) = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 25}}$.

b. Déterminer la valeur exacte de x qui minimise la longueur des tuyaux.